Álgebra III
Examen VII

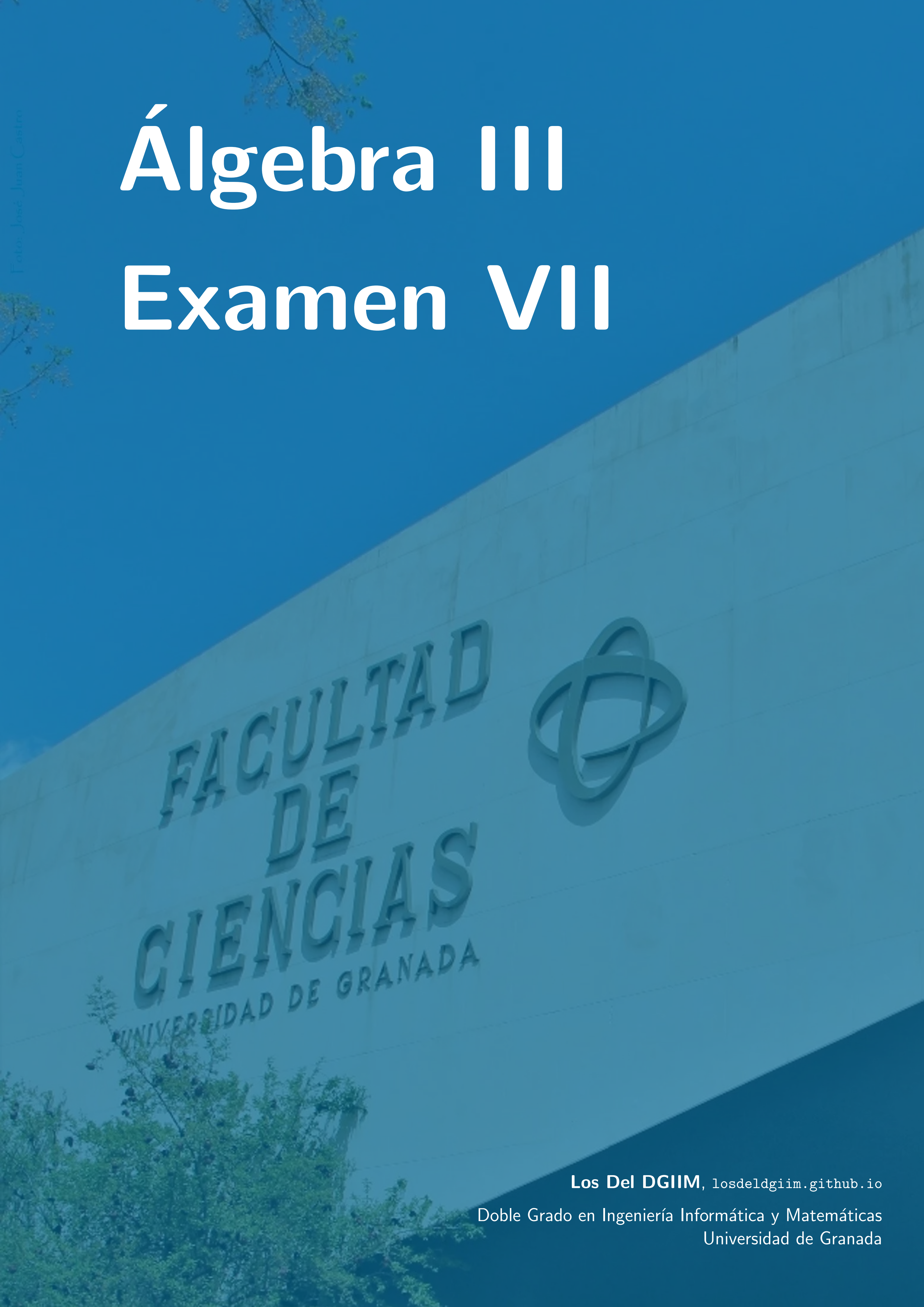

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra III
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Irina Kuzyshyn Basarab

Granada, 2026

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 16 de enero de 2026.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Sea $f = x^4 + 3x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y K su cuerpo de descomposición.

1. Demostrar que f tiene una raíz real positiva α tal que $\alpha \notin \mathbb{Q}(\alpha^2)$.
2. Demostrar que $i\sqrt{2} \in K$ y calcular $[K : \mathbb{Q}]$.
3. Calcular $Aut(K)$ definiendo explícitamente todos sus elementos.
4. Calcular los subgrupos de $Aut(K)$ correspondientes por la conexión de Galois con los subcuerpos $\mathbb{Q}(\alpha^2)$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ de K, listando sus elementos.
5. Decidir razonadamente cuál es el grado del polinomio

$$g = Irr(\alpha + i\sqrt{2}, \mathbb{Q})$$

¿Es g resoluble por radicales? ¿Son las raíces commplejas de f constructibles con regla y compás?

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $\eta \in \mathbb{C}$ una raíz decimocuarta primitiva de la unidad.

1. Calcular el decimocuarto polinomio ciclotómico ϕ_{14}.
2. Calcular, definiendo explícigtamente todos sus elementos, $Aut(\mathbb{Q}(\eta))$ y todos sus subgrupos.
3. Calcular, expresando sus generadores en función de η, todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\eta)$.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Vimos en clase que $\mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_2(a)$ con a satisfaciendo la ecuación $a^6+a+1 = 0$, y que a es un elemento primitivo del $\mathbb{F}_{64}$. Calcular, expresándolas en función de a, las raíces en $\mathbb{F}_{64}$ del polinomio $h = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.